|  |
| --- |
| Методы адаптивные |
| Значительно более эффективны при решении жестких задач адаптивные методы, основанные на получении оценок наибольших по модулю собственных значений и последующей стабилизации расчетной схемы в полученных точках жесткого спектра.  Одношаговые адаптивные методы строятся на основе стадий Рунге-Кутты, которые выполняются по формулам:  , ;  где – число стадий, и – параметры метода (в общем случае самонастраиваемые. Далее вычисляются векторы  которые используются для получения оценок собственных значений и в заключительной формуле шага интегрирования.  Вектор покомпонентных оценок наибольшего собственного значения получим в виде |

С помощью этих оценок вычисляется вектор настраиваемых параметров с, который используется в формуле шага интегрирования

Из последней формулы видно, что порядок метода для жестких задач не может превышать . На основе формул вышеописанных формул построены одношаговые методы Адаптивный 1, 2, 3, 5.

**Адаптивный 1**

Этот метод - явный одношаговый трехстадийный (на каждом шаге производится три обращения к процедуре вычисления правых частей). Стадии выполняются по формулам

где , а значение вычисляются на основе информации предыдущего шага. Принимаем

и покомпонентно вычисляем вектор оценок наибольшего по модулю собственного значения матрицы , где - якобиан в текущей точке решения. Формула шага интегрирования имеет вид

,

и также реализуется покомпонентно.

Для оценивания ошибки используется двухшаговая формула типа Адамса.

Метод имеет второй порядок. Его рекомендуется использовать для решения нежестких и жестких задач с вещественным жестким спектром при низких требованиях к точности ().

**Адаптивный 2**

Расчетные формулы этого метода практически такие же, как у метода Адаптивный 1. Отличие заключается в том, что ошибка решения оценивается по правилу Рунге, т.е. используя один шаг размером и два шага размером . Метод имеет третий порядок. Его рекомендуется использовать для решения жестких задач с вещественным жестким спектром при низких требованиях к точности ().

**Адаптивный 3**

Явный четырехстадийный адаптивный метод () реализован в соответствии с формулами (все арифметические операции с векторами выполняются покомпонентно):

,

Для оценивания погрешности используется формула

где коэффициенты рассчитываются в зависимости от значения . Метод имеет 4-й порядок для линейных и 3-й для нелинейных систем. Его рекомендуется использовать для интегрирования жестких систем с вещественным жестким спектром при средних требованиях к точности ().

**Адаптивный 4**

Этот метод является многошаговым и реализуется в 3 этапа:

1. прогноз по явной формуле Адамса;
2. покомпонентное оценивание наибольшего собственного значения;
3. покомпонентная коррекция по неявной многошаговой формуле.

Формула коррекции позволяет стабилизировать расчетную схему в полученных точках жесткого спектра. Метод имеет переменный порядок (от 2‑го до 6‑го). Для оценивания погрешности используется многошаговая формула более низкого порядка. Данный метод рекомендуется использовать для решения нежестких и жестких задач с вещественным жестким спектром при любых требованиях к точности.

**Адаптивный 5**

Стадии явного пятистадийного одношагового метода выполняются по формулам

,

На основе полученной информации вычисляются покомпонентные оценки двух наибольших по модулю собственных значений (которые могут быть комплексно-сопряженными). Шаг интегрирования выполняется по формуле

где коэффициенты вычисляются с использованием полученных оценок наибольшего собственного значения. Оценка ошибки решения производится по двухшаговой формуле.

Метод имеет 4-й порядок для линейных и 3-й для нелинейных систем. Его рекомендуется использовать для решения умеренно жестких задач с комплексным жестким спектром, а также осциллирующих задач с собственными значениями якобиана вблизи мнимой оси.

**Адаптивный неявный**

Метод имеет порядок от 2-го для жестких до 4-го для нежестких задач; он построен на основе метода трапеций, формула которого имеет вид

Выполняя один шаг величиной , получим (), а выполняя два шага величиной , получим (). Далее вычисляем вектор покомпонентных оценок наибольшего собственного значения

который используется в заключительной расчетной формуле

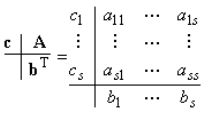
**Диагонально неявный**

В общем случае метод Рунге-Кутты задается формулами

*;*

*,*

и может быть представлен в виде таблицы Бутчера

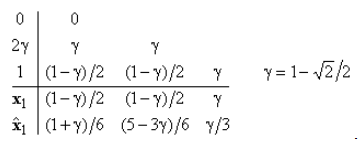
**

Часто приводят также формулу

которая используется для получения оценки погрешности численного решения . В этом случае в таблицу, приведенную выше, добавляется строка коэффициентов .

В явном методе при, тогда формулы, приведенные выше, задают расчетный алгоритм, который может быть непосредственно реализован. В противном случае метод является неявным и требует при своей реализации решения системы алгебраических уравнений. Среди неявных методов Рунге‑Кутты наиболее просто реализуются диагонально неявные (DIRK – Diagonally Implicit Runge‑Kutta), у которых матрица **A** имеет нижнюю треугольную форму.

**Диагонально неявный** – метод 2-го порядка, задаваемый таблицей Бутчера

**

Его можно интерпретировать как последовательное применение правила трапеций и формулы дифференцирования назад 2-го порядка, поэтому он получил название TR-BDF2. Этот метод реализован также и в системе MATLAB+Simulink под названием ode23tb.

**DIRK44** – метод 4-го порядка с 4-мя неявными стадиями и коэффициентами